Pondichéry avril 2006

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$). On prendra 5 cm pour unité graphique.

Soit f la transformation qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M′ d'affixe z' définie par : $z' = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)z + 1$.

1. Justifier que f est une similitude directe dont on précisera le centre Ω (d'affixe ω), le rapport k et l'angle θ.
2. On note A_0 le point O et, pour tout entier naturel n, on pose $A_{n+1} = f(A_n)$.

a. Déterminer les affixes des points A_1, A_2, A_3 puis placer les points A_0, A_1, A_2 et A_3.

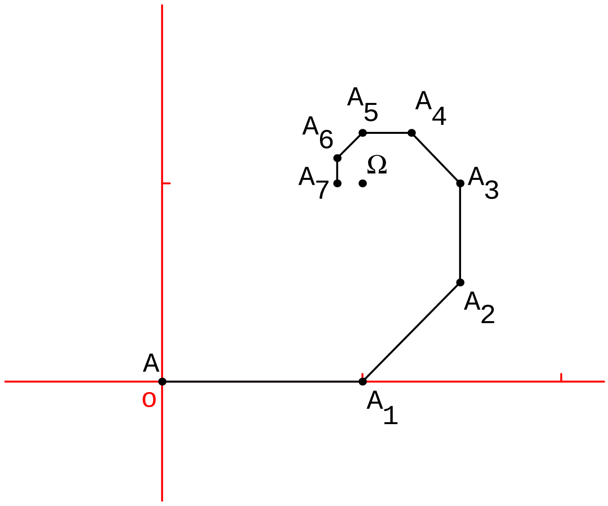
b. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \Omega A_n$. Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique puis établir que, pour tout entier naturel n, $u_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.

c. À partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre Ω et de rayon 0,1 ?

3\. *a.* Quelle est la nature du triangle $\Omega A_0 A_1$?
En déduire, pour tout entier naturel n, la nature du triangle $\Omega A_n A_{n+1}$.

b. Pour tout entier naturel n, on note ℓ_n la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$.
On a ainsi : $\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$.
Exprimer ℓ_n en fonction de n.
Quelle est la limite de la suite (ℓ_n) ?

CORRECTION



1. La transformation f est de la forme $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$: c'est donc une similitude directe.

son centre Ω est invariant par f : donc son affixe est solution de $z = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)z + 1$.

donc $(1 - \mathrm{i})z = 2$ donc $z = \frac{2}{1-\mathrm{i}} = 1 + \mathrm{i}$. Le centre de la similitude est donc Ω d'affixe $\omega = 1 + \mathrm{i}$.

Le rapport de la similitude est $|a| = \left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

L'angle de la similitude est $\arg a = \frac{\pi}{4}$.

2\. *a.* $a_0 = 0$ donc $a_1 = 1$, $a_2 = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right) + 1 = \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$

b. $u_n = \Omega A_n$ or Ω est le centre de la similitude f de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $A_{n+1} = f(A_n)$ donc $\Omega A_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\Omega A_n$ soit $u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}u_n$

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ de premier terme $u_0 = \Omega A_0 = \sqrt{2}$ donc, pour tout entier naturel n, $u_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n u_0$ soit $u_n = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ or $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ donc $u_n = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.

c. La suite (u_n) est une suite géométrique à termes positifs de raison $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ donc $0 < q < 1$ donc la suite est décroissante.

tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre Ω et de rayon 0,1 si et seulement si $u_n \leq 0{,}1$

soit $\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \leq 0{,}1 \Leftrightarrow 10\sqrt{2} \leq (\sqrt{2})^n \Leftrightarrow \frac{n}{2}\ln 2 \geq \ln[10\sqrt{2}] \Leftrightarrow n \geq \frac{2\ln[10\sqrt{2}]}{\ln 2} \Leftrightarrow n \geq 8$

Si $n \geq 8$ alors les points A_n appartiennent au disque de centre Ω et de rayon 0,1.

3\. *a*. $\Omega A_0 = |1 + i| = \sqrt{2}$; $\Omega A_1 = |i| = 1$ et $A_0 A_1 = |1| = 1$ donc le triangle $\Omega A_0 A_1$ est rectangle isocèle en A_1.
Démontrons par récurrence que le triangle $\Omega A_n A_{n+1}$ est rectangle isocèle en A_{n+1}
– La propriété est vraie pour $n = 0$.
Montrons que pour tout n, la propriété est héréditaire donc que si le triangle $\Omega A_{n-1} A_n$ est rectangle isocèle en A_n alors le triangle $\Omega A_n A_{n+1}$ est rectangle isocèle en A_{n+1}.
$f(\Omega) = \Omega$, $f(A_{n-1}) = A_n$ et $f(A_n) = A_{n+1}$ Or le triangle $\Omega A_n A_{n+1}$ est l'image par la similitude du triangle $\Omega A_{n-1} A_n$ donc est de même nature, soit rectangle isocèle en A_{n+1}.
La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

b. D'après la question précédente $\ell_n = A_0A_1 + \ldots + A_{n-1}A_n = \Omega A_1 + \Omega A_2 + \ldots + \Omega A_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

en posant $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$: $\ell_n = u_0(q + q^2 + \ldots + q^n) = u_0\, q\,(1 + q + \ldots + q^{n-1}) = u_0\, q\, \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$

$-1 < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\ell_n = \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = 2 + \sqrt{2}$.