

Nombres entiers et Numération décimale

Source : *Master, Professeur des écoles, Epreuve d'admission, Mathématique, épreuve orale, Hatier Concours, Rollant Charnay, Michel Mante, 2011.*

Table des matières

1. Premiers apprentissages de nombres entiers (maternelle, CP)	2
1.1. Généralités	2
1.1.1. Trois grandes habilités des jeunes enfants	2
1.1.2. A quoi servent les nombres (5 à 8 ans) ?	2
1.2. Les problèmes de mémorisation	2
1.2.1. Problèmes liés à des collections équipotentes ou à la comparaison de collections	2
1.2.2. Problèmes liés au repérage d'objets ordonnés	2
1.2.3. Procédures de résolution de problèmes d'équipotence	3
1.2.4. Procédures de résolution de problèmes de repérage	3
1.3. Les problèmes d'anticipation	3
1.3.1. Problèmes d'anticipation portant sur les quantités	3
1.3.2. Problèmes d'anticipation liés au repérage d'objets ordonnés	3
1.3.3. L'importance de l'anticipation	4
1.3.4. Procédures de résolution d'anticipation (sans calcul)	4
2. Numération décimale, comparaison, suite de nombres, repérage sur une droite graduée (C2 et C3)	4
2.1. Les écritures chiffrées et la numération décimale	4
2.1.1. Procédures de résolution visant la compréhension des écritures chiffrées	4
2.1.1.1. Problème de codage	4
2.1.1.2. Problème de décodage	5
2.1.2. Procédures pour comparer les nombres	5
2.1.3. La suite des écritures chiffrées	5
2.1.4. Placer ou repérer des nombres sur une ligne graduée	6
2.2. La désignation orale des nombres, le passage de l'oral à l'écrit et de l'écrit à l'oral	6
2.2.1. L'apprentissage du début de la suite orale des nombres	6
2.2.2. L'apprentissage de la correspondance entre désignation orale et désignation chiffrée	6
2.2.3. La question de la comparaison de nombres exprimés oralement	6
3. Programmes de l'école primaire	7
3.1. B.O. 2008	7
3.2. Progressivité des apprentissages	7

1. Premiers apprentissages de nombres entiers (maternelle, CP)

1.1. Généralités

1.1.1. Trois grandes habilités des jeunes enfants

- La discrimination des collections en fonction de leur taille ;
- L'appariement (ou mise en correspondance) de collections selon leur taille ;
- La manipulation des quantités (augmentation notamment).

Plus tard, ils acquièrent la comptine orale des nombres (chaîne numérique verbale) afin de répondre à des problèmes de dénombrement (*Combien ?*) relatifs à des quantités (augmentation, diminution, partage).

1.1.2. A quoi servent les nombres (5 à 8 ans) ?

	Aspect cardinal	Aspect ordinal
	Quantités	Positions dans une liste rangée
Mémoriser	Les nombres pour garder la mémoire d'une quantité en vue de la reproduire, de la communiquer, de la compléter, de la comparer à une autre quantité...	Les nombres pour garder la mémoire d'une position en vue de la retrouver, de la communiquer...
Anticiper le résultat d'actions	Les nombres utilisés pour connaître à l'avance le résultat d'une augmentation, d'une diminution, d'un partage ou de retrouver une quantité avant qu'elle n'ait subi une transformation.	Les nombres peuvent être utilisés pour connaître, à l'avance le résultat d'un déplacement (en avant ou en arrière) dans une liste rangée ou pour retrouver la position initiale avant le changement.

1.2. Les problèmes de mémorisation

1.2.1. Problèmes liés à des collections équipotentes ou à la comparaison de collections

Deux collections sont équipotentes si une correspondance un à un (ou terme à terme) peut être établie entre les deux collections, donc si elles comportent autant d'objets l'une que l'autre.

Problème A : construire une collection B équipotente à une collection A de référence (par exemple apporter autant de pailles qu'il y a de gobelets).

Problème B : fournir une information à quelqu'un pour qu'il puisse construire une collection B équipotente à une collection A de référence (par exemple, donner une information pour qu'une autre personne apporte autant de pailles qu'il y a de gobelet).

Problème C : construire une collection C à partir d'une collection de référence A de manière à ce que chaque élément de A correspondent 2, 3, ... n éléments de C (par exemple, apporter 2 ou 3 pailles pour chacun des verres).

Problème D : comparer deux collections A et B du point de vue de la quantité d'objets qu'elles contiennent.

Problème E : fournir une information à quelqu'un pour qu'il puisse comparer deux collections A et B du point de vue de la quantité.

Problème F : compléter une collection B pour qu'elle soit équipotente à une autre collection.

1.2.2. Problèmes liés au repérage d'objets ordonnés

Problème G : se souvenir de la position d'un objet (qui a par exemple été placé dans une série de boîtes identiques) pour pouvoir le retrouver ou le remettre à sa place.

Problème H : fournir une information à quelqu'un pour qu'il puisse trouver un objet situé par exemple dans une série de boîtes identiques.

1.2.3. Procédures de résolution de problèmes d'équipotence

La correspondance terme à terme : elle est souvent la seule procédure de résolution possible pour des enfants qui ne savent pas encore dénombrer. Elle constitue également une procédure de validation par l'action lorsqu'une autre procédure a été utilisée pour la résolution du problème.

Le dénombrement : dénombrer c'est utiliser un moyen qui permet d'exprimer une quantité par un nombre.

- **Le subitizing ou reconnaissance perceptive immédiate** de la quantité (d'un seul coup d'œil) ;
- **Le dénombrement** par comptage de un en un :
 - o Principe d'adéquation unique : chaque mot énoncé doit être mis en stricte correspondance terme à terme avec un seul élément de la collection.
 - o Principe d'ordre stable : les mots utilisés doivent être toujours les mêmes et énoncés dans un ordre strict.
 - o Principe cardinal : le dernier mot de la suite suffit pour mémoriser la quantité, pour « cardinaliser » la collection.
 - o Principe d'abstraction : on peut compter des objets disparates, quelle que soit la spécificité de chacun.
 - o Principe de non-pertinence de l'ordre : l'ordre dans lequel les éléments sont pris en compte est sans importance.
- L'estimation approximative (ordre de grandeur).

1.2.4. Procédures de résolution de problèmes de repérage

Variables didactiques :

- Place des collections ;
- Nature des boîtes : toutes identiques ou non ;
- Conditions de réalisation de la tâche ;
- Possibilité ou non de désigner la boîte.

L'utilisation des nombres pour numéroter les objets.

1.3. Les problèmes d'anticipation

1.3.1. Problèmes d'anticipation portant sur les quantités

Problème I : trouver la quantité obtenue après ajout ou retrait d'objets dans une collection.

Problème J : trouver la quantité obtenue par la réunion de deux ou plusieurs collections.

Problème K : trouver le nombre d'éléments d'une des parties d'une collection en connaissant le nombre d'éléments de la collection et de la partie complémentaire.

Problème L : à propos du partage d'une collection en collections équipotentes ou non, chercher la valeur d'une part en connaissant le nombre de parts à réaliser ou le nombre de parts si la valeur d'une part est donnée.

1.3.2. Problèmes d'anticipation liés au repérage d'objets ordonnées

Problème M : trouver le point d'arrivée d'un pion se déplaçant sur une piste graduée, le point de départ, le sens et la valeur du déplacement étant connus.

Problème N : trouver le sens et la valeur du déplacement d'un pion se déplaçant sur une piste graduée, le point de départ et le point d'arrivée étant connus.

Problème O : trouver le point de départ d'un pion se déplaçant sur une piste graduée, le point d'arrivée, le sens et la valeur du déplacement étant connus.

1.3.3. L'importance de l'anticipation

C'est l'absence des objets, des quantités... dans l'espace ou dans le temps qui crée la nécessité d'utiliser les nombres.

La résolution mathématique nécessite ici l'anticipation sur l'action.

1.3.4. Procédures de résolution d'anticipation (sans calcul)

Le recomptage : l'enfant représente chaque objet (doigts, dessins) et compte l'ensemble des éléments représentés.

Le surcomptage (ou comptage en avant) : l'enfant retient 4 (sans réaliser avec ses doigts) et compte en avançant de 3 au-delà de 4 (5, 6, 7) éventuellement en s'aidant de 3 doigts levés.

Le décomptage (ou comptage en arrière).

Le double comptage : cela consiste à faire avancer deux suites numériques décalées en même temps. Par exemple, pour savoir de combien de cases mon pion doit avancer pour passer de la case 5 à 9, il est possible de dire :

6	7	8	9
1	2	3	4

2. Numération décimale, comparaison, suite de nombres, repérage sur une droite graduée (C2 et C3)

Deux systèmes de désignation des nombres entiers :

- Le système écrit : numération chiffrée (1, 2, 3...)
- Le système oral : numération verbale (« un », « deux », « trois »...)

2.1. Les écritures chiffrées et la numération décimale

Problème 1 : comment organiser une collection d'objets pour pouvoir écrire facilement le nombre d'objets qu'elle contient (problème de codage) ?

Problème 2 : comment construire une collection dont le nombre d'objets est donné par son écriture chiffrée (problème de décodage) ?

Problème 3 : comment comparer deux quantités d'objets à partir de donnée des expressions chiffrées des nombres d'objets ?

Problème 4 : comment produire la suite des nombres de un en un, de dix en dix... ?

Problème 5 : comment placer des nombres sur une ligne régulièrement graduée ?

2.1.1. Procédures de résolution visant la compréhension des écritures chiffrées

2.1.1.1. Problème de codage

Groupement successifs réguliers par dix :

- Faire des groupements de dix objets (dizaines) ;
- Faire des groupements de dix dizaines (centaines) ;
- Faire des groupements de dix centaines (milliers).

Groupement-échange par 10, il faut représenter les dizaines, les centaines, les milliers par d'autres objets :

- Echanger 10 bâtons de 1 unité contre un triangle de dizaine ;
- Echanger 10 triangles de dizaine contre un carré de centaine ;
- Echanger 10 carrés de centaine contre un losange de milliers.

A partir de ces procédures, les connaissances suivantes sont établies :

- La régularité des groupements successifs par 10 ;
- Les égalités :
 - o 1 dizaine = 10 unités
 - o 1 centaine = 10 dizaines = 100 unités
 - o 1 millier = 10 centaines...
- Chaque type d'unité correspond à une position dans l'écriture du nombre ;
- Le rôle de 0 a pour marquer l'absence d'unité d'un certain type ;
- La décomposition associée comme :
 - o $3\ 042 = 1000 + 1000 + 1000 + 10 + 10 + 10 + 10 + 1 + 1$
 - o $3\ 042 = (3 \times 1000) + (4 \times 10) + 2$

Remarque :

- La monnaie fonctionne selon ce principe de groupement-échange ;
- Boulier : chaque ligne représente unité, dizaine, centaine...

2.1.1.2. Problème de décodage

Valeur positionnelle des chiffres.

2.1.2. Procédures pour comparer les nombres

Etape 1 : Si les deux nombres n'ont pas le même nombre de chiffres, le plus grand est celui qui a le plus de chiffres.

Etape 2 : Si les deux nombres ont le même nombre de chiffres, on regarde le chiffre du rang le plus à gauche :

- Si ces deux chiffres sont différents, le plus grand nombre est celui qui a « le plus grand chiffre » de l'unité la plus grande représentée ;
- Si ces deux chiffres sont les mêmes, on regarde le chiffre suivant, jusqu'au cas où ils diffèrent.

Erreurs fréquentes :

- $46 > 202$: les élèves passent directement à la 2^{ème} étape sans vérifier la première.
- $23 < 17$: des élèves n'ayant pas compris le principe d'écriture des nombres pensent que les chiffres s'additionnent ($2+3=5$ et $1+7=8$).
- Les erreurs peuvent être dues au fait que des élèves ne maîtrisent pas le symbolisme de la comparaison (signes $<$ et $>$).

2.1.3. La suite des écritures chiffrée

L'organisation de la suite numérique écrite, parfaitement régulière, correspond aux effets des groupements en base dix.

Erreurs fréquentes :

- Le passage de 69 à 70 est délicat pour certains :
 - o 610 : car après 9 il y a 10 ;
 - o 610 : car on dit « soixante-dix ».
(idem avec le passage de 299 à 300).
- Après 29 l'élève écrit 39 : -
 - o l'élève fait avancer de 1 le chiffre des dizaines, mais il est bloqué pour les unités, car il n'y a rien après 9 ;
 - o l'élève n'a pas compris qu'il doit faire avancer le chiffre les plus à droite d'abord.

- Après 310 il écrit 320 : il fait avancer le premier chiffre non nul le plus à droite, il est gêné par 0 qui n'est pas un chiffre (on compte à partir de 1 effectivement).

2.1.4. Placer ou repérer des nombres sur une ligne graduée

Il est demandé d'associer des nombres et des positions sur la droite ainsi graduée, soit de manière exacte, soit de manière approchée.

Ce type d'activité renforce la maîtrise de la comparaison.

Erreur fréquentes :

- L'élève ne tient pas compte du pas choisi pour le placement des repères ;
- L'élève ne tient pas compte des relations entre nombres. Ex : placer 325 au milieu de 300 et 400 et non dans le premier quart.

2.2. La désignation orale des nombres, le passage de l'oral à l'écrit et de l'écrit à l'oral

2.2.1. L'apprentissage du début de la suite orale des nombres

La suite de 11 à 20 :

- Mémorisation complète de 11, 12, 13, 14, 15, 16, 20
- Plus de facilité et de logique pour 17, 18 et 19.

La suite de 20 à 60 :

- Suite facile à mémoriser.

La suite de 60 à 99 :

- Difficulté pour $70 = 60 + 10$
- Difficulté pour $80 = 4 \times 20$
- Difficulté pour $90 = 80 + 10$

2.2.2. L'apprentissage de la correspondance entre désignation orale et désignation chiffrée

Pour la zone régulière des nombres inférieurs à 100 (de 20 à 59), la lecture est assez simple.

Pour la zone irrégulière des nombres de 60 à 99, il convient de travailler en deux temps :

- La zone de 69 à 79 : quand j'entends « soixante », je peux écrire 6 ou 7 dans les dizaines, cela dépend de la suite du nombre.
- La zone de 80 à 99 : idem que précédemment.

Au-delà de 100, le système de lecture devient systématique.

Concernant les grands nombres, les écritures chiffrées sont organisées en tranches de 3 chiffres séparées par un court espace pour faciliter la lecture.

Ex : 53 287 709 008 490 026
 ↑ ↑
 Billion Million

53 mille 287 billion 709 mille 8 million 490 mille 26.

2.2.3. La question de la comparaison de nombres exprimés oralement

On compare selon des mots clés (mille, million) la partie les précédents.

3. Programmes de l'école primaire

3.1. B.O. 2008

Maternelle	Cycle 2	Cycle 3
Rubrique « Découvrir le monde » : approcher les quantités et les nombres	Rubrique « Nombre et calcul »	
<p>L'école maternelle constitue une période décisive dans l'acquisition de la suite des nombres (chaîne numérique) et de son utilisation dans les procédures de quantification. Les enfants y découvrent et comprennent les fonctions du nombre, en particulier comme représentation de la quantité et moyen de repérer des positions dans une liste ordonnée d'objets.</p> <p>Les situations proposées aux plus jeunes enfants (distributions, comparaisons, appariements...) les conduisent à dépasser une approche perceptive globale des collections. L'accompagnement qu'assure l'enseignant en questionnant (comment, pourquoi, etc.) et en commentant ce qui est réalisé avec des mots justes, dont les mots-nombres, aide à la prise de conscience. Progressivement, les enfants acquièrent la suite des nombres au moins jusqu'à 30 et apprennent à l'utiliser pour dénombrer.</p> <p>Dès le début, les nombres sont utilisés dans des situations où ils ont un sens et constituent le moyen le plus efficace pour parvenir au but : jeux, activités de la classe, problèmes posés par l'enseignant de comparaison, d'augmentation, de réunion, de distribution, de partage.</p> <p>La taille des collections, le fait de pouvoir agir ou non sur les objets sont des variables importantes que l'enseignant utilise pour adapter les situations aux capacités de chacun.</p> <p>À la fin de l'école maternelle, les problèmes constituent une première entrée dans l'univers du calcul mais c'est le cours préparatoire qui installera le symbolisme (signes des opérations, signe "égal") et les techniques.</p> <p>La suite écrite des nombres est introduite dans des situations concrètes (avec le calendrier par exemple) ou des jeux (déplacements sur une piste portant des indications chiffrées). Les enfants établissent une première correspondance entre la désignation orale et l'écriture chiffrée ; leurs performances restent variables mais il importe que chacun ait commencé cet apprentissage. L'apprentissage du tracé des chiffres se fait avec la même rigueur que celui des lettres.</p>	<p>Les élèves apprennent la numération décimale inférieure à 1 000.</p> <p>Ils dénombrent des collections, connaissent la suite des nombres, comparent et rangent.</p>	<p>L'étude organisée des nombres est poursuivie jusqu'au milliard, mais des nombres plus grands peuvent être rencontrés.</p> <p>Les nombres entiers naturels :</p> <ul style="list-style-type: none"> - principes de la numération décimale de position : valeur des chiffres en fonction de leur position dans l'écriture des nombres ; - désignation orale et écriture en chiffres et en lettres ; - comparaison et rangement de nombres, repérage sur une droite graduée, utilisation des signes > et < ;

3.2. Progressivité des apprentissages

CP	CE1	CE2	CM1	CM2
<p>Connaître (savoir écrire et nommer) les nombres entiers naturels inférieurs à 100.</p> <p>Comparer, ranger, encadrer ces nombres.</p> <p>Écrire une suite de nombres dans l'ordre croissant ou décroissant.</p>	<p>Connaître (savoir écrire et nommer) les nombres entiers naturels inférieurs à 1 000.</p> <p>Repérer et placer ces nombres sur une droite graduée, les comparer, les ranger, les encadrer.</p> <p>Écrire ou dire des suites de nombres de 10 en 10, de 100 en 100, etc.</p>	<p>Les nombres entiers jusqu'au million</p> <p>Connaître, savoir écrire et nommer les nombres entiers jusqu'au million.</p> <p>Comparer, ranger, encadrer ces nombres.</p>	<p>Les nombres entiers jusqu'au milliard</p> <p>Connaître, savoir écrire et nommer les nombres entiers jusqu'au milliard.</p> <p>Comparer, ranger, encadrer ces nombres.</p>	<p>Les nombres entiers</p>