**Antilles-Guyane septembre 2010**

On suppose connues la dérivée de la fonction exponentielle et la formule de dérivation de $u \circ v$ ainsi que ses conditions d'utilisation.
On suppose savoir que la fonction ln est dérivable sur ] 0 ; + ∞ [ et que pour tout $x$ de ] 0 ; + ∞ [ on a : exp (ln $x$) = $x$.
À partir de ces quatre arguments, montrer que la dérivée de la fonction ln est la fonction définie sur ] 0 ; + ∞ [ qui à $x$ associe $\frac{1}{x}$.

**CORRECTION**

La fonction $f$ définie par $f(x) = \exp(\ln x) = x$ est la composée des fonctions dérivables $u(x) = \exp(x)$ et $v(x) = \ln x$.
$f$ est dérivable sur ] 0 ; + ∞ [ et $f'(x) = u'[v(x)] \times v'(x)$ or $u'(x) = \exp(x)$ donc $f'(x) = \exp(\ln x)\, v'(x) = x\, v'(x)$
or sur ] 0 ; + ∞ [ $f(x) = x$ donc $f'(x) = 1$ donc $x\, v'(x) = 1$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$

La dérivée de la fonction ln est la fonction définie sur ] 0 ; + ∞ [ qui à $x$ associe $\frac{1}{x}$.

**Asie juin 2007**

On rappelle que lorsque $t$ tend vers + ∞, alors $\frac{e^t}{t}$ tend vers +∞. Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

**CORRECTION**

Soit $x \in$ ] 0 ; + ∞ [ il existe un réel $t = \ln x$ tel que $x = e^t$ donc $\frac{\ln x}{x} = \frac{t}{e^t} = \frac{1}{\frac{e^t}{t}}$

$\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{t}{e^t} = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{1}{\frac{e^t}{t}} = 0$

donc $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} t = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{t}{e^t} = 0 \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

**CENTRES ÉTRANGERS JUIN 2008**

Prérequis : on rappelle que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

**1.** Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

**2.** En déduire que pour tout entier naturel $n$ non nul : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$.

**CORRECTION**

**1.** Soit X = ln $x$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} X = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$, $x = e^X$ donc $\frac{\ln x}{x} = \frac{X}{e^X} = \frac{1}{\frac{e^X}{X}}$ or $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X}$ $\frac{e^x}{x}$ = + ∞. donc

$\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

**2.** $\frac{\ln x^n}{x^n} = n \frac{\ln x}{x^n}$ soit $X = x^n$ alors pour tout entier naturel $n$ non nul, $\lim\limits_{x \to +\infty} X = \lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$, donc $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{\ln X}{X}$ = 0

or $\frac{\ln x^n}{x^n} = \frac{\ln X}{X}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x^n}{x^n} = 0$ soit $\lim\limits_{x \to +\infty} n \frac{\ln x}{x^n} = 0$ donc pour tout entier naturel $n$ non nul : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$.