Comment trouver l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\dfrac{z - z_A}{z - z_B}$ soit réel ?

Commencer par le domaine de définition : $z \neq z_B$ donc M ≠ B

Deux techniques possibles :

Méthode 1

$\dfrac{z - z_A}{z - z_B}$ est réel $\Leftrightarrow$ il existe un réel k tel que $\dfrac{z - z_A}{z - z_B} = k$ avec $z \neq z_B$

$\Leftrightarrow z - z_A = k\,(z - z_B)$ avec $z \neq z_B$

or $z - z_A$ est l'affixe de $\overrightarrow{AM}$ et $z - z_B$ est l'affixe de $\overrightarrow{BM}$

$\dfrac{z - z_A}{z - z_B}$ est réel $\Leftrightarrow$ il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{BM}$ avec M ≠ B

$\Leftrightarrow$ le point M appartient à la droite (AB) privée de B

Méthode 2

$$\frac{z - z_A}{z - z_B} \text{ est réel} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{z - z_A}{z - z_B} = 0 \\ \text{ou} \\ \arg\left(\dfrac{z - z_A}{z - z_B}\right) = 0 + k\,\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = z_A \\ \text{ou} \\ \arg\left(\dfrac{z - z_A}{z - z_B}\right) = 0 + k\,\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{M} = \text{A} \\ \text{ou} \\ (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = 0 + k\,\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{M} = \text{A} \\ \text{ou} \\ \text{M décrit la droite (AB) privée de A et B} \end{cases} \Leftrightarrow \text{M décrit la droite (AB) privée de B}$$

Les mêmes techniques permettent de répondre aux questions $\dfrac{z - z_A}{z - z_B}$ est réel non nul ou réel positif ou réel négatif.